XX Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2017
Soluciones y Criterios para calificar

Problema 1 [3 puntos]
Sea $n \geq 1$ y sean $k_0, \ldots, k_{n+1}$ enteros positivos. Demostrar que existen enteros $m_1, \ldots, m_n$ tales que

$$mcd(k_0,\ \ldots,\ k_{n+1}) = mcd(k_0 + m_1 k_1 + \ldots + m_n k_n,\ k_{n+1}).$$

Solución Demostramos esto para $n = 1$. La demostración en general se sigue por inducción. Es claro que (a, b, c) divide a $(a + cd, b)$ para cualquier d. Dividiendo por (a, b, c) podemos asumir que $(a, b, c) = 1$, por lo que hay que demostrar que existe un entero d tal que $(a + cd, b) = 1$.

Procedemos por inducción sobre b. Para $b = 1$ es claro. Ahora probamos que el resultado es cierto para $b = n$, asumiendo que es cierto para todo $b < n$. Si $(b, c) = 1$, entonces el conjunto

$$\{a, a + b, \ldots, a + c(b - 1)\}$$

es un sistema completo de residuos módulo b, de manera que existe d tal que $(a+cd, b) = 1$. Si $(b, c) > 1$ entonces $b/(b, c) < n$, y así existe d tal que $(a + cd, b/(b, c)) = 1$. Como $(a, b, c) = 1$ esto implica que $(a + cd, b) = 1$, como queríamos.

Comentario: El resultado es falso para $n = 0$. Por ejemplo, no existe un entero m tal que $(5, 7) = |5 + 7m|$.

Criterios
2 puntos Probar el caso $n = 1$
1 punto Indicar la inducción de n a $n + 1$.

Problema 2 [3 puntos]
Sea $S = \{1, 2, 3, \dots, 2017\}$. Un jardinero siembra césped en S, de la siguiente forma: Cada día el jardinero puede plantar césped en un solo elemento de S cualquiera, además si el número i está cubierto de césped, al día siguiente este césped se habra extendido y cubrirá los números $i-1$, i e $i+1$ (Siempre y cuando los índices estén en el conjunto S). Determinar la menor cantidad de días que necesita el jardinero para lograr cubrir todo S de césped.

Solución: Sea k el número de días necesarios para cubrir S, el césped plantada en el día a se habrá extendido $k-a$ veces en dos direcciones y por lo tanto cubrirá a los sumo $2(k-a)+1$ elementos de S. Como al final cada elemento de S queda cubierto, tendremos que
$2017 \leq \sum_{a=1}^{k} [2(k-a)+1] = \sum_{b=0}^{k-1} [2b+1] = k^2$. Por lo tanto $k \geq \lceil \sqrt{2017} \rceil = 45$

Para ver que es posible cubrir S en 45 días, sea x_n el número en el que el jardinero planta el césped en el n-ésimo día, el jardinero puede plantar de la siguiente forma: toma $x_1 = 45$, y para $i = 1, 2, \dots, 44$ toma $x_{i+1} = \text{mín}\{x_i + 2(45-i), 2017\}$. Como el césped del día i se extiende $45-i$ veces en el día 45, basta ver que todo $a \in S$ se encuentra a distancia de a lo sumo $45-i$ de x_i para algún i.
Si $a \leq x_1 = 45$ esto es claro.
Por definición $x_{i+1} - x_i \leq 2(45-i)$, por lo que si $x_i \leq a \leq x_{i+1}$ entonces $a \leq x_i + 45 - i$ o $a \geq x_{i+1} - (45-i-1)$ y por tanto a terminará cubierto de césped.
Por último, tenemos por definición $x_{45} = \text{mín}\{2017, 45 + \sum_{i=1}^{44} [2(45-i)]\} = \text{mín}\{2017, 2025\} = 2017$, por lo que todo S quedrá cubierto de césped en el día 45.

Criterios
1 punto Verificar que se necesitan al menos 45 días.
2 puntos Demostrar que 45 días funciona.

Problema 3 [4 puntos]
Sean P, Q, R puntos alineados en el plano, con Q estrictamente entre P y R, distinto del punto medio de P y R. Sea $\mathcal{H}$ la rama de la hipérbola, con focos P y R, que pasa por Q. Determinar el lugar geométrico de los incentros de los triángulos HPR al variar el punto H sobre $\mathcal{H} \setminus \{Q\}$.

Nota: El incentro de un triángulo es el centro de su círculo inscrito.

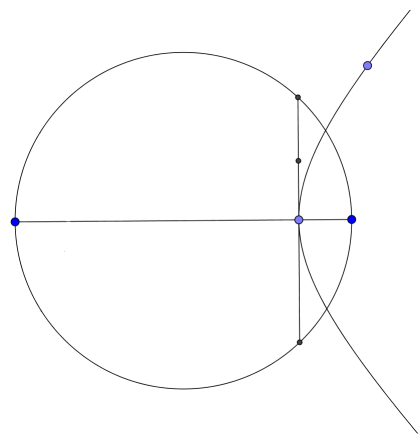
Solución Sea $H \in \mathcal{H} \setminus \{Q\}$. Tenemos que

$$QP - QR = HP - HR, \quad QP + QR = PR,$$

por lo que

$$QP = \frac{PR + HP - HR}{2}, \quad QR = \frac{PR - HP + HR}{2}.$$

Esto implica que Q es el punto de tangencia del incírculo con PR. En particular, el lugar geométrico está contenido en una recta perpendicular a PR que pasa por Q.



Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $QP > QR$. Denotamos

$$PR = a, \quad QP = \frac{a+t}{2}, \quad QR = \frac{a-t}{2},$$

con $0 < t < a$. Sea $HP + HR = b > a$, de manera que

$$HP = \frac{b+t}{2}, \quad HR = \frac{b-t}{2}.$$

Es necesario y suficiente que $b > a$ para que exista un punto $H \in \mathcal{H}$ que satisfaga $HP + HR = b$. Comparando la fórmula de Herón y la fórmula del área basada en el semiperímetro e inradio dan que

$$r(b) = \frac{1}{\frac{a+b}{2}} \sqrt{\frac{a+b}{2} \frac{b-a}{2} \frac{a+t}{2} \frac{a-t}{2}} = \sqrt{\frac{a+t}{2} \frac{a-t}{2}} \sqrt{\frac{b-a}{a+b}}.$$

El rango de la función $(b-a)/(a+b)$ para $b > a$ es $(0,1)$, por lo que todos los posibles valores del inradio $r(b)$ están en el intervalo

$$\left(0, \sqrt{\frac{a+t}{2} \frac{a-t}{2}}\right) = (0, \sqrt{QP \cdot QR}).$$

Por lo tanto, el lugar geométrico es un segmento perpendicular a PR que pasa por Q, simétrico con respecto a PR, de longitud $2\sqrt{QP \cdot QR}$, sin extremos ni el punto medio.

Criterios
1 punto Calcular las longitudes de PQ y QR en términos de las longitudes de los lados.
1 punto Verificar que el lugar geométrico está en la línea perpendicular a PR y que pasa por Q.
1 punto Encontrar las coordenadas del incentro.
1 punto Concluir.

Problema 4 [5 puntos]
Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen $f(x)f(y) = f(x+y)$ y $f(x) \geq 1 + x$, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Solución Tenemos que $f^2(0) = f(0)$ y $f(0) \geq 1$, por lo que $f(0) = 1$. Esto implica que $f(x) \neq 0$ para todo x, pues $f(x)f(-x) = f(0) = 1$. Además, para $x < 1$ tenemos que

$$f(x) = \frac{1}{f(-x)} \leq \frac{1}{1-x}.$$

Esto implica que si $x < 1$ entonces

$$1 + x \leq f(x) \leq \frac{1}{1-x},$$

de donde se concluye que $f(x) \to 1$ si $x \to 0$. Esto y la ecuación funcional implican que f es continua en $\mathbb{R}$. Es sencillo demostrar que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(q) = e^{aq}$ para $q \in \mathbb{Q}$, y por continuidad se obtiene que $f(x) = e^{ax}$ para $x \in \mathbb{R}$.

Falta determinar los posibles valores de a. Tenemos que $f(x) = e^{ax} = 1 + ax + r(x)$, donde $r(x)/x \to 0$ si $x \to 0$. La desigualdad $f(x) \geq 1 + x$ implica que $r(x) \geq (1-a)x$, de donde

$$\frac{r(x)}{|x|} \geq (1-a)\frac{x}{|x|}.$$

Tomando $x \to 0^+$ se obtiene que $a \geq 1$ y tomando $x \to 0^-$ se sigue que $a \leq 1$. Así se concluye que $f(x) = e^x$ es el único posible candidato. Esta función satisface ambas condiciones, con lo que concluye el problema.

Criterios
1 punto Ver que $f(0) = 1$ y $f(x) \neq 0$ para todo x.
2 puntos Verificar que f es continua.
1 punto Concluir que f es una exponencial $\exp(ax)$.
1 punto Encontrar el valor de a.

Problema 5 [6 puntos]
Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales acotada. Para $\{x_{n_k}\}$ y $\{x_{m_k}\}$ dos subsucesiones, definimos la relación de equivalencia $\{x_{n_k}\} \sim \{x_{m_k}\}$, si $\lim_{k\to\infty}(x_{n_k} - x_{m_k}) = 0$. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de clases de equivalencias de $\sim$. Prueba que $|\mathcal{C}| = 1$ o $\mathcal{C}$ es no numerable.

Solución

Sean $\alpha = \liminf_{n\to\infty} x_n$ y $\beta = \limsup_{n\to\infty} x_n$. Supongamos que $\alpha < \beta$. Sean x_{n_k} y x_{m_k} sucesiones tales que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$ y $\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = \beta$. Como $\lim_{k\to\infty} x_{m_k} - x_{n_k} = \beta - \alpha > 0$, tendríamos que $|\mathcal{C}| \geq 2$. Por lo tanto si $|\mathcal{C}| = 1$ la sucesión x_n satisface $\alpha = \beta$ y por tanto es convergente. Además es claro que si x_n es convergente solo hay una clase de equivalencia, de aquí que $|\mathcal{C}| = 1$ si y sólo si x_n es convergente.

Supongamos ahora que x_n no es convergente, en este caso $\alpha < \beta$ y tomamos las sucesiones x_{n_k} y x_{m_k} como antes. Vamos a demostrar que $\mathcal{C}$ es no numerable.

Sea $y \in [0,1]$, escribimos $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ con $a_n \in \{0,1\}$, la expansión binaria de y. Consideremos la siguiente sucesión $F_y = \{x_{r_k}\}$, donde $r_k = m_k$ si $a_k = 1$ y $r_k = n_k$ si $a_k = 0$.

Supongamos que $x, y \in [0,1]$ son tales que $F_x = \{x_{s_k}\} \sim F_y = \{x_{r_k}\}$. Demostraremos que $x - y \in \mathbb{Q}$. De $F_x \sim F_y$ obtenemos que $\lim_{k\to\infty}(x_{s_k} - x_{r_k}) = 0$. Sea $K \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \geq K$ se tiene que

$$x_{n_k} < \alpha + \frac{\beta - \alpha}{4} = a,$$

$$x_{m_k} > \beta - \frac{\beta - \alpha}{4} = b$$

Sea $\epsilon = b - a = \frac{\beta-\alpha}{2} > 0$. Tomo $K_1 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \geq K_1$ se tiene que $|x_{s_k} - x_{r_k}| < \epsilon$. De la elección de ϵ se sigue que $s_k = r_k$ para toda $k \geq \text{máx}\{K_1, K\}$. Esto se traduce a que las expansiones binarias de $x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$ y $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$, satisfacen que $a_n = b_n$ para toda $n \geq \text{máx}\{K_1, K\}$ y de ahi que $x - y = \sum_{n=1}^{\text{máx}\{K_1,K\}} \frac{b_n - a_n}{2^n} \in \mathbb{Q}$.
La relación de equivalencia en $[0,1]$ $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$, es conocido que tiene una cantidad no numerable de clases de equivalencia. Sea A el conjunto de clases de equivalencia de esta relación, para cada $\omega \in A$ tomo un representante de ω digamos x_ω, si $\omega \neq \omega' \in A$ debemos tener que F_{x_ω} no es equivalente a $F_{x_{\omega'}}$ ya que $x_\omega - x_{\omega'} \notin \mathbb{Q}$. Por lo tanto tenemos que $\mathcal{C}$ contiene al menos tantos elementos como A y de ahi que $\mathcal{C}$ es no numerable.

Criterios
1 punto Verificar que $|\mathcal{C}| = 1$ si y solo si la sucesión es convergente.
5 puntos Demostrar que C es no numerable si C no es convergente, distribuidos como sigue:
3 puntos Construir una familia no numerable de clases de equivalencia.
2 puntos Demostrar que la familia es no numerable.

Problema 6 [7 puntos]
Sea K un cuerpo finito, $K \neq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, y considere los conjuntos $A = \{a^2 : a \in K\}$, $B = \{b^4 : b \in K\}$. Demostrar que todo elemento de K se puede escribir como suma de un elemento de A y otro de B.

Solución Sea g un generador del grupo cíclico K^*, $k = |K^*|$ y C el conjunto de los elementos que se escriben como suma de un elemento de A y otro de B. Si la característica del cuerpo es 2 el problema es trivial porque todos los elementos son cuadrados perfectos.

Si k es par tenemos que $A = \{0\} \cup \{g^{2m} : m \in \mathbb{Z}\}$, $K \setminus A = \{g^{2m+1} : m \in \mathbb{Z}\}$ y $A \subseteq C$. Por lo tanto el problema se reduce a probar $K \setminus A \subseteq C$.

Ahora, si k no es divisible entre 4 entonces $B = A$ y el problema se reduce a probar que todo elemento del cuerpo es suma de dos elementos de A. Observamos primero que deben existir enteros $0 \leq m, n < k/2$ tales que

$$g^{2m+1} = g^{2n} + 1.$$

Si este no fuera el caso entonces los conjuntos

$$\{0, g^2, \ldots, g^{2(k/2)}\} = \{1, g^2 + 1, \ldots, g^{2(k/2)} + 1\}$$

serían iguales. Luego, la suma de los dos conjuntos debería ser igual, pero esto implica que $k/2+1 = 0$, lo cual no es posible dado que $k + 1 = 0$. Por lo tanto existen m, n tales que

$$g^{2m+1} = g^{2n} + 1.$$

Esto implica que

$$g^{2p+1} = g^{2(n+p-m)} + g^{2(p-m)},$$

y así se concluye en este caso.

En el caso en que 4 divida a k se tiene que $-1 = g^{k/2}$ es un residuo cuadrático. Esto implica que para $c \in C$ la cantidad de soluciones a la ecuación

$$c = a_1 + a_2, \quad a_i \in A,$$

es la misma que la de la ecuación

$$c = a_1 - a_2, \quad a_i \in A.$$

Lema. Si k es divisible por 4, la ecuación $c = a_1 - a_2$, con $a_i \in A$ tiene $k/2+1$, $k/4+1$, $k/4$ soluciones, dependiendo si $c = 0$, $c \in A \setminus \{0\}$, $c \in K \setminus A$, respectivamente.
Prueba Primero, la cantidad de pares (a_1, a_2) es $(k/2 + 1)^2$. Si $c = 0$ es claro que la cantidad de soluciones es $k/2 + 1$. Además es claro que la cantidad de soluciones es igual para todos los elementos de cada uno de los conjuntos $A \setminus \{0\}$ y $K \setminus A$. Procedemos a contar la cantidad de soluciones para $c = 1$. Si $a_1 = x^2$, $a_2 = y^2$, entonces

$$1 = a_1 - a_2 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

Esto implica que $x - y = g^{-m}$, $x + y = g^m$, para algún $0 \leq m < k$. Por lo tanto,

$$a_1 = \frac{g^{2m} + g^{-2m}}{4} + \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{g^{2m} + g^{-2m}}{4} - \frac{1}{2}.$$

El valor de a_i permanece invariante si m se reemplaza por $m - k/2$, por lo que se puede suponer sin pérdida de generalidad que $0 \leq m < k/2$. Si $g^{2m} + g^{-2m} = g^{2n} + g^{-2n}$ para algún par $0 \leq m, n < k/2$ entonces se tiene la igualdad de conjuntos $\{g^{2m}, g^{-2m}\} = \{g^{2n}, g^{-2n}\}$, pues la suma y el producto de los elementos del conjunto es igual. Si $g^{2m} = g^{2n}$ entonces $k/2$ divide a $m - n$; pero $|m - n| < k/2$, lo que implica que $m = n$. En caso que $g^{2m} = g^{-2n}$, se tiene que $k/2$ divide a $m+n$. Como $0 \leq m+n < k$, se tiene que $m = n = 0$ o $m + n = k/2$. De esto se concluye que la cantidad de soluciones es $k/4 + 1$ para $c = 1$. Finalmente, la cantidad de soluciones para elementos de $K \setminus A$ es

$$\frac{1}{k/2}\left(\left(\frac{k}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{k}{2}+1\right) - \frac{k}{2}\cdot\left(\frac{k}{4}+1\right)\right) = \frac{k}{4}.$$

Ahora continuamos con el problema. Vamos demostrar que existen enteros $0 \leq m < k/2$, $0 \leq n, p < k/4$ tales que

$$g^{2m+1} = g^{4n+2} + g^{4p}.$$

De ser este el caso es inmediato concluir que $K \setminus A \subseteq C$. Supongamos que no es así; de manera particular, no existen enteros $0 \leq m < k/2$, $0 \leq n < k/4$ tales que

$$g^{2m+1} = g^{4n+2} + 1.$$

Por el lema sabemos existen $k/4$ pares $0 \leq m, n < k/2$ tales que

$$g^{-1} = g^{2m} - g^{2n},$$

lo que implica que existen exactamente $k/4$ pares $0 \leq m, n < k/2$ tales que

$$g^{2m+1} = g^{2n+1} + 1.$$

Como $g^{2m+1} \neq 1$ para todo m, dada la suposición anterior, esto implica deben existir otros $k/4 = k/2 - k/4$ pares $0 \leq m < k/2$, $0 \leq n < k/4$ tales que

$$g^{2m+1} = g^{4n} + 1.$$

En particular, $g^{4n} \neq -1$ para todo n, por lo que existe n tal que $g^{4n+2} = -1$. Con base en lo anterior, si existen $0 \leq m < k/2$ y $0 \leq p < k/4$ tales que

$$g^{2m+1} = g^{4p} - 1,$$

entonces se concluye inmediatamente el resultado. Suponemos nuevamente que este no es el caso. Esto implica que para todo $1 \leq p < k/4$ existe $0 \leq m < k/4$ tal que

$$g^{4p} = g^{4m+2} + 1.$$

Estas ecuaciones junto con las relaciones $0 = (-1) + 1$, $1 = 0 + 1$, nos dan que la igualdad de conjuntos

$$\{0, g^4, \ldots, g^{4(k/4)}\} = \{1, g^2 + 1, \ldots, g^{4(k/4)-2} + 1\}.$$

La suma de los conjuntos debe ser igual, en particular,

$$1 - g^2 + \ldots + g^{k-4} - g^{k-2} = \frac{k}{4} + 1.$$

Si $1 + g^2 \neq 0$, como en el caso de $K \neq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, entonces se tiene que

$$1 - g^2 + \ldots + g^{k-4} - g^{k-2} = \frac{1 - g^k}{1 + g^2} = 0.$$

Esto implicaría que $k/4 + 1 = 0$, o bien $k + 4 = 0$. Como $k + 1 = 0$, entonces el problema está resuelto excepto cuando la característica del cuerpo es 3. Para completar el problema, recordamos que de no ser cierto el problema existe $0 \leq n < k/4$ tal que $g^{4n+2} = -1$. Como $g^{k/2} = -1$ y $|k - (4n+2)| < k/2$, esto implica que $k = 8n + 4$, es decir $|K| = 8n + 5$. Sin embargo, en el caso de que la característica sea 3, las cardinalidades de los posibles cuerpos son congruentes a 1 o 3 módulo 8, y así concluye el problema.

Comentario: El caso en que $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con p primo, el caso $p = 2$ es trivial. El caso $p = 4k + 3$ se reduce al problema de suma de cuadrados. El teorema de Cauchy-Davenport resuelve inmediatamente el problema. Por lo tanto el caso interesante es $p = 4k + 1$. Nuevamente por el teorema de Cauchy-Davenport, el conjunto $A + B$ tiene por lo menos

$$\left(\frac{p-1}{2} + 1\right) + \left(\frac{p-1}{4} + 1\right) - 1 = \frac{3p+1}{4}$$

elementos. La igualdad se da si y sólo si cada uno de los conjuntos A y B está en progresión aritmética. Descartando que esto sea el caso, lo cual no me parece trivial, entonces $A+B$ contiene más de $(3p+1)/4$ elementos. Esto quiere decir que todas las clases

$$\{0\}, \quad B, \quad gB, \quad g^2B, \quad g^3B,$$

tienen por lo menos un elemento en $A + B$. Multiplicando este elemento por todos los elementos de B se obtiene el resultado.

Criterios
1 punto Verificar el caso de característica 2, y descartarlo en el resto del argumento.
1 punto Determinar que hay que considerar un generador del grupo multiplicativo y su orden k.
1 punto Determinar que hay dos casos, (i) cuando 4 no divide a k y (ii) cuando 4 divide a k.
1 punto Resolver el caso (i).
3 puntos Resolver el caso (ii).

Problema 7 [7 puntos]
Sean $a < b < c < d$ números reales, y sea

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-a| \cdot |x-b| \cdot |x-c| \cdot |x-d|}}.$$

Demostrar que

$$\int_a^b f = \int_c^d f.$$

Solución En el semiplano superior $\operatorname{Im} z \geq 0$ sea

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{z-a} \cdot \sqrt{z-b} \cdot \sqrt{z-c} \cdot \sqrt{z-d}}$$

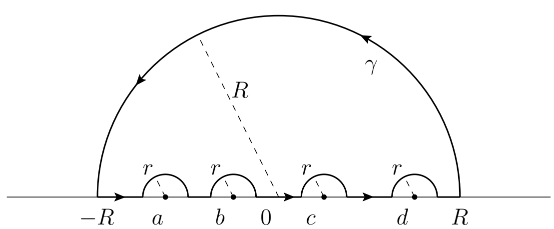
donde la raíz cuadraa está definida de tal forma que $0 \leq \arg \sqrt{z} \leq \frac{\pi}{2}$. A lo largo del eje real, tenemos

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in (-\infty, a) \text{ or } x \in (d, \infty) \\ i\, f(x) & \text{if } x \in (a, b) \\ -f(x) & \text{if } x \in (b, c) \\ -i\, f(x) & \text{if } x \in (c, d) \end{cases}$$

de tal forma que

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int_{-\infty}^{a} f - \int_{b}^{c} f + \int_{d}^{\infty} f \right) + \left(\int_{a}^{b} f - \int_{c}^{d} f \right) i.$$

Mostraremos que $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$; entonces se sigue que $\int_a^b f - \int_c^d f = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ y por lo tanto $\int_a^b f = \int_c^d f$.



En la línea de integración, reemplazar las vecindades de los puntos a, b, c, d and ∞ Por semicírculos, como se muestra en la figura. Como g es holomorfa, su integral de línea es cero a lo largo de la curva modificada γ; por lo tanto

$$\int_{-R}^{a-r} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a+r}^{b-r} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b+r}^{c-r} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+r}^{d-r} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{d+r}^{R} g(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\gamma} g(z)\,\mathrm{d}z + \mathcal{O}\left(r \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}\right) + \mathcal{O}\left(R \cdot \frac{1}{R^2}\right) = \mathcal{O}\left(\sqrt{r}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right).$$

Cuando $r \to 0$ y $R \to \infty$ tenemos que $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Observación
De acuerdo a la fórmula de Schwarz–Christoffel, la antiderivada $G(z)$ de $g(z)$ manda el semiplano superior a un rectángulo; en particular, $G(x) = \int_{-\infty}^{x} g$ mapea la línea real a la frontera del rectángulo; y los segmentos $[a, b]$ y $[c, d]$ van a lados opuestos.

Criterios
1 punto Determinar la función compleja g con las ramas de definición para la inversa.
1 punto Describir la relación de la función g restringida a la recta real con la función f.
2 puntos Determinar la integral de línea y usar el teorema de Cauchy.
3 puntos Calcular los límites aduecados para concluir.